9 ШЕГЕРМЕЛЕР
9.1 Функциялардың шегермелері

z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған айрықша нүктесі болсын. Олай болса z_0 нүктесінің қандай да бір тесік (ойық) аймағында $f(z)$ аналитикалық болады. γ - осы тесік аймақта жатқан және z_0 нүктесі ішінде жататын кез келген оң бағытта жүргізілген тұйық контур болсын.

Анықтама 28. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі *шегермесі* деп

$$res\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \tag{9.1}$$

санын айтамыз. (Басқа белгілеулері: $res[f(z); z_0]$, $\underset{z=z_0}{res} f(z)$).

Лоран қатарының коэффициенттерін анықтайтын (7.20) формуласы бойынша $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегермесі осы функцияның осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктелуінің негізгі бөлігінің бірінші коэффициентіне тең екендігі шығады, яғни

$$res\, f(z_0) = c_{-1}. \tag{9.2}$$

Теорема 4 мен (9.2) теңдігінен келесі теореманы аламыз.

Теорема 7. Түзетілетін айрықша нүктедегі шегерме нөлге тең.

Полюс үшін келесі теоремалар орынды болады.

Теорема 8. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының n - ші ретті полюсі болса, онда

$$res\, f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{f(z)(z-z_0)^n\right\}. \tag{9.3}$$

z_0 қарапайым полюс $(n=1)$ болған жағдайда

$$res\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]. \tag{9.4}$$

Теорема 9. Егер $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің аймағында $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ екі аналитикалық функцияларының қатынасы

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

түрінде берілсе, сондай-ақ $\varphi(z_0)\neq 0$, ал $\psi(z_0)=0$ және $\psi'(z_0)\neq 0$, яғни z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының қарапайым полюсі болса, онда

$$res\, f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{9.5}$$

Егер $f(z)$ функциясы z_0 нүктесі реті бірден жоғары нөлдері болатын $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ аналитикалық функциялары арқылы $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ түрінде жазылса, онда $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегермесін $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ функцияларын олардың z_0 нүктесінің аймағындағы Тейлор қатарына жіктелулерімен ауыстыру арқылы табуға болады.

9.2 Шексіз алыс нүктеге қатысты функцияның шегермесі

Анықтама 29. Егер

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

функциясы $\xi=0$ нүктесінде аналитикалық болса, онда $f(z)$ функциясы $z=\infty$ шексіз алыс нүктесінде *аналитикалық* деп аталады.

Мысал үшін $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ функциясы $z=\infty$ нүктесінде аналитикалық, себебі

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sin\xi$$

функциясы $\xi=0$ нүктесінде аналитикалық болады.

$z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі болып (яғни аналитикалық нүктесі болмаса) және оның қандай да бір $|z|>R$ аймағында $f(z)$ функциясының басқа айрықша нүктелері болмаса, онда $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының *оқшауланған айрықша нүктесі* деп аталады.

$f(z)$ функцияның $z=\infty$ айрықша нүктесі $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ шегінің санға тең, шексіздікке тең немесе болмауына сәйкес осы функцияның түзетілетін айрықша нүктесі, полюсі немесе маңызды (елеулі) айрықша нүктесі деп аталады.

Шектеусіз алыс айрықша нүктенің түрінің Лоран жіктелуімен байланысты берілген белгілері тиянақты айрықша нүктелері үшін берілген белгілерден өзгеше болады.

Енді соларға тоқталайық. Бұл арада $f(z)$ функциясының $z=\infty$ *нүктесінің аймағында Лоран жіктелуі* деп $f(z)$ функциясының центрі $z=0$ нүктесі болатын қандай да бір дөңгелектің сыртында (яғни $|z|>R$ жиынында), мүмкін $z=\infty$ нүктесінің өзін есептемегенде, жинақты болатын z айнымалысының дәрежелері бойынша Лоран жіктелуін айтамыз.

Теорема 10. Егер $f(z)$ функциясының $z=\infty$ шектеусіз алыс нүктесінің аймағындағы Лоран жіктелінуінде z айнымалысының оң дәрежелі мүшелері болмаса, онда $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі болады; егер Лоран жіктелінуінде оң дәрежелі мүшелер бар және олардың саны шектеулі болса, онда $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болады; егер Лоран жіктелінуінде z айнымалысының оң дәрежелі мүшелер саны шектеусіз болса, онда $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды айрықша нүктесі болады.

Анықтама 30. $z=\infty$ нүктесінің қандай да бір аймағында ($z=\infty$ нүктесінің өзін есептемегенде) аналитикалық $f(z)$ функциясының *шексіздіктегі шегермесі* деп

$$res\, f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz\,, \tag{9.6}$$

санын айтамыз, мұндағы γ^- - аталған аймақта жататын центрі бас нүктеде орналасқан сағат тілі бағытымен (шеңбердің сырты сол жақта болатын бағытпен) жүргізілген шеңбер.

Бұл анықтамадан $f(z)$ функциясының шексіздіктегі шегермесі $f(z)$ функциясының $z=\infty$ нүктесінің аймағында Лоран жіктелуіндегі z^{-1} дәрежесінің қарама-қарсы таңбамен алынған коэффициентіне тең екендігі шығады:

$$res\, f(\infty)=-c_{-1}\,. \tag{9.7}$$

Белгілі $e^z, \sin z, \cos z, shz, chz$ функцияларының z айнымалысының дәрежелеріне жіктелулерін $z=\infty$ нүктесінің аймағында Лоран жіктелулері ретінде қарастыруға болады. Бұл жіктелулердің әрқайсысында z -тің оң дәрежелі мүшелерінің саны шектеусіз болғандықтан аталған функциялар үшін $z=\infty$ маңызды айрықша нүкте болады.

Теорема 11. Егер $f(z)$ функциясының кеңейтілген комплекс жазықтықтағы айрықша нүктелерінің саны шектеулі болса, онда оның осы нүктелердегі шегермелерінің $z=\infty$ нүктесіндегі шегермесін қоса есептегендегі қосындысы нөлге тең.

Сонымен $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ берілген $f(z)$ функциясының барлық тиянақты айрықша нүктелері болса, онда

$$res\, f(\infty)+\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k)=0$$

немесе

$$\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k)=-res\, f(\infty). \tag{9.8}$$